



# Curvas De Crédito

**Metodologia**  
04/11/2013

## Sumário

1- Curvas de Crédito – Método .....	2
2- Ratings .....	5
3- Tratamento Da Base De Dados.....	6
3.1- Opções Embutidas.....	6
3.2- Intervalo de Confiança .....	7
3.3- Ativos de Curto Prazo e Título Sintético de um dia.....	7
5- Bibliografia.....	9

## 1- Curvas de Crédito – Método

O aumento da oferta e demanda por ativos de crédito após 2005, principalmente de debêntures, e as atuais políticas do governo brasileiro para estimular o financiamento privado de longo prazo através da concessão de incentivos fiscais e redução de exigências para emissão de dívida corporativa, alertaram para a importância de desenvolver mecanismos que auxiliem a gestão de portfólios, análise de risco e aumentem a transparência dos mercados.

Dando continuidade ao trabalho já consolidado de divulgação diária de preços indicativos referenciais para marcação de carteiras de renda fixa e ratificando seu objetivo de prover informação ao mercado, foi desenvolvida uma metodologia para construir curvas de crédito privado que reflitam spreads médios de risco para diferentes níveis de rating. Em conjunto com a consultoria do professor Caio Ibsen Rodrigues de Almeida, da Fundação Getúlio Vargas, um modelo paramétrico foi aplicado aos preços indicativos das debêntures remuneradas em DI e IPCA pertencentes à amostra diária de precificação da ANBIMA.

A modelagem de curvas de juros proposta por Nelson & Siegel sintetiza três movimentos apontados por pesquisadores como mais comuns nessas estruturas: nível, inclinação e curvatura. O estudo destes componentes foi aprofundado por Litterman e Scheinkman no trabalho “*Common Factors Affecting Bond Returns*” (1991). Motivados pela busca de funções capazes de representar estes movimentos, os autores propuseram a modelagem da taxa de juros pela equação:

$$r(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda \tau} \right) + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda \tau} - e^{-\lambda \tau} \right)$$

Além da interpretação dos movimentos, é possível realizar análises por prazo através dos parâmetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . A constante  $\beta_0$  representa o nível das taxas de longo prazo, já que o limite da função quando o tempo tende a infinito é o próprio  $\beta_0$ . O  $\beta_1$  multiplica um termo exponencial que tende a zero quando o prazo tende a infinito, representando portanto as taxas de curto prazo. É possível afirmar, portanto, que a taxa de curtíssimo prazo é determinada por  $(\beta_0 + \beta_1)$ .

Finalmente,  $\beta_2$  é interpretado como termo de médio prazo, já que este multiplica um termo exponencial com formato de U. Há uma tendência a zero quando o prazo é baixo, aumentando à medida que o prazo cresce e revertendo a tendência com assíntota em zero nas maturidades mais longas.

Existe ainda um parâmetro  $\lambda$ , que governa a velocidade de decaimento exponencial da taxa  $r(\tau)$ , onde valores mais altos implicam em decaimento mais rápido e conseqüentemente melhor ajuste para os ativos de curto prazo, assim como, valores pequenos implicam decaimento lento e melhor ajuste em prazos mais longos.

Svensson (1994), ao analisar estruturas a termo para a Suécia de 1992 a 1994, propôs a inclusão de uma curvatura adicional à forma funcional de Nelson & Siegel (1987) com o objetivo de aumentar a flexibilidade e melhorar o ajuste aos dados. Almeida et. al. (2009) afirma que a inclusão deste quarto fator é importante na modelagem em mercados emergentes, que geralmente apresentam taxas mais voláteis.

Diebold, Li e Yue (2008), ao estimar curvas de juros com fatores globais para diversos países, perceberam empiricamente que na maioria das vezes a curvatura é estimada com baixa precisão devido à falta de dados nas maturidades muito curtas e muito longas, muitas vezes atrapalhando o ajuste da curva aos dados. Os autores propuseram, então, o uso do modelo de Nelson & Siegel apenas com fatores de nível e inclinação para tratar o problema. A função que determina a taxa de juros spot para o prazo  $\tau$ , neste caso, fica reduzida ao formato abaixo:

$$r(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda \tau} \right)$$

Seguindo a premissa básica de que o preço de um ativo de renda fixa é o valor presente dos seus fluxos de pagamento descontados por uma taxa de juros de mercado, a função de desconto modelada será:

$$DF_i = 1 / ((1 + DI) * (1 + S)), \text{ no caso de debêntures remuneradas em DI}$$

$$DF_i = 1 / ((1 + REAL) * (1 + S)), \text{ no caso de debêntures remuneradas em IPCA}$$

Onde:  $S$  é o spread de crédito modelado segundo  $r(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda \tau} \right)$

CDI a taxa de ajuste de DI Futuro da BM&F interpolado para o prazo.

REAL: Curva zero cupom IPCA da ANBIMA descontado o prêmio de risco<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Para compatibilizar os spreads das debêntures remuneradas em DI e em IPCA, é necessário desconsiderar o prêmio de risco do governo da curva base de NTN-B. O cálculo do prêmio realizado neste trabalho com

Por consequência, o preço do ativo é determinado pela equação:

$$P = \sum_{i=1}^n DF_i x FCI_i$$

Onde: DF<sub>i</sub> é a função desconto modelada para o prazo *i*

FCI é o valor do fluxo de pagamento no prazo *i*

A estimação das curvas de crédito é realizada pela solução do sistema de equações abaixo, onde a curva DI e as de spread de crédito por rating serão estimadas conjuntamente. Conforme apresentado abaixo, a curva de DI seguirá a forma funcional de Svensson, enquanto as de crédito seguirão o modelo de Nelson & Siegel sem as curvaturas.

$$r_{di}(\tau) = \beta_{di} + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{di}\tau}}{\lambda_{di}\tau} \right) + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{di}\tau}}{\lambda_{di}\tau} - e^{-\lambda_{di}\tau} \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{di}^2\tau}}{\lambda_{di}^2\tau} - e^{-\lambda_{di}\tau} \right)$$

$$r_{AAA}(\tau) = \beta_{AAA} + (\beta_{1crédito}) \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{crédito}\tau}}{\lambda_{crédito}\tau} \right)$$

$$r_{AA}(\tau) = \beta_{AA} + (\beta_{1Crédito}) \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{crédito}\tau}}{\lambda_{crédito}\tau} \right)$$

$$r_A(\tau) = \beta_A + (\beta_{1Crédito}) \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{crédito}\tau}}{\lambda_{crédito}\tau} \right)$$

Onde:  $\tau$  é o prazo em anos

$\beta_{di}$ ,  $\beta_{AAA}$ ,  $\beta_{AA}$ ,  $\beta_A$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_{1crédito}$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\lambda_{di}$ ,  $\lambda_{2di}$  e  $\lambda_{crédito}$  são parâmetros dos modelos.

É importante notar que os parâmetros de inclinação ( $\beta$ Crédito) e decaimento ( $\lambda$ ) são comuns às três curvas de spread, mas cada uma possui um parâmetro próprio de nível, representando a diferença de crédito.

Para estimar os parâmetros da metodologia acima, utiliza-se a técnica de mínimos quadrados ponderados. O ponderador é necessário porque pequenos choques na taxa de desconto influenciam os preços dos ativos de longo prazo mais significativamente do que os de curto prazo.

Desta forma, para determinar as estruturas, resolve-se o problema de otimização abaixo:

$$\text{Min} \sum_{\text{Rating CDI}} \sum_{i=1}^n (W_i (P_{\text{Modelo}} - P_{\text{Anbima}}) / P_{\text{Anbima}})^2$$

Onde, 
$$W_i = \frac{1}{\text{Duration}_{(\text{em ano})}}$$

$P_{\text{modelo}}$ : Somatório do fluxo de caixa do ativo descontado a valor presente

$P_{\text{Anbima}}$ : Preço observado em mercado

## 2- Ratings

Alguns problemas podem surgir ao estimar curvas por níveis de crédito. Em primeiro lugar, não há uma padronização na nomenclatura das notas emitidas por agências diversas, ou ainda, podem existir notas em níveis diferentes para um mesmo ativo. Portanto, é necessário compatibilizá-las de modo a obter uma classificação única para a modelagem e desenvolver uma metodologia de escolha em caso de divergência.

A tabela abaixo mostra a compatibilidade de *ratings* entre as agências, adotada pela Associação:

STANDARD & POOR'S	FITCH RATINGS	MOODY'S INVESTORS SERVICE
brAAA	AAA (bra)	Aaa.br
brAA	AA (bra)	Aa.br
brA	A (bra)	A.br
brBBB	BBB (bra)	Baa.br
brBB	BB (bra)	Ba.br
brB	B (bra)	B.br
brCCC	CCC (bra)	Caa.br
brCC	CC (bra)	Ca.br
brC	C (bra)	C.br
brD	DDD (bra), DD(bra) e D (bra)	--

Tabela 1: Tabela de compatibilização de ratings

A metodologia empregada para selecionar o risco de crédito associado a um determinado ativo segue a seguinte hierarquia:

- 1) Agências classificadoras: Standard & Poor's, Fitch Ratings e Moody's Investors Service.
- 2) Desconsideram-se as variações de sinal dentro de uma mesma escala, ou seja, não há distinção entre as classificações neutro, *plus* e *minus*.
- 3) Caso haja mais de uma agência, foi considerado o *rating* mais conservador sempre.

### 3- Tratamento Da Base De Dados

#### 3.1- Opções Embutidas

Algumas debêntures apresentam opções embutidas em suas cláusulas, o que torna o risco destes papéis um pouco maior, já que o emissor tem o direito de resgatá-los antes da maturidade pelo seu valor ao par<sup>2</sup>. Para esta classe de ativos, o investidor exige uma rentabilidade maior para assumir o risco, forçando uma queda de preço em relação àqueles de mesmo *rating* sem cláusulas de recompra antecipada. Devido a essa divergência de preços, todas as debêntures que apresentam em sua escritura cláusulas de resgate antecipado ou amortização antecipada foram eliminadas da amostra.

<sup>2</sup> Diz-se que um ativo está ao par quando seu preço é exatamente igual ao valor de face, ou seja, sem ágio ou deságio.

### 3.2- Intervalo de Confiança

Para garantir um espaçamento mínimo entre as curvas de crédito, foi desenvolvido um método baseado na construção de intervalos de confiança. Aplicando a teoria de vetor autoregressivo (VAR), com 126 observações e defasagem de um dia, projetam-se as diferenças mínimas esperadas entre os níveis das estruturas de crédito, que são incorporadas ao modelo como restrições na otimização.

### 3.3- Ativos de Curto Prazo e Título Sintético de um dia

Empiricamente percebe-se no mercado uma redução significativa da liquidez do ativo quando este se aproxima do vencimento, acarretando em muitos casos distorções de preços, que poderiam influenciar as curvas de forma errônea.

Com o objetivo de minimizar este problema, porém mantendo alguma referência para os spreads de curto prazo, ativos com menos de 21 dias úteis para vencimento foram desconsiderados da amostra e foi inserido um título sintético com maturidade de um dia para cada um dos níveis de risco. Seus preços são baseados no histórico de 126 dias úteis da taxa de curtíssimo prazo, obtida pelo somatório dos parâmetros de nível e inclinação ( $B_0 + B_1$ ).

#### Identificação de Outliers

Por tratar-se de uma amostra de preços com heterogeneidade de emissores, é comum encontrar observações distorcidas capazes de influenciar os resultados finais da modelagem.

Para tratar o problema, foi aplicada uma métrica baseada na análise de resíduos de Cook (1977), em que calcula-se a razão entre o erro quadrático médio incluindo todos os ativos e o erro quadrático médio sem o  $i$ -ésimo ativo da amostra, de acordo com a descrição abaixo:

1. Calcula-se o erro quadrático médio com todos os ativos da amostra (EQM).
2. Elimina-se da amostra um dos ativos, o ativo  $i$ .
3. Estima-se novamente as curvas e calcula-se o erro quadrático médio (EQMi).
4. Encontra-se a razão EQM/EQMi para o ativo  $i$ , denominada aqui de valor crítico.

Os procedimentos (2) a (4) são repetidos até que todos os ativos tenham sido selecionados. Desta maneira, obtém-se um vetor de valores críticos para toda a amostra, de modo que o preço do ativo  $i$  estará distante da distribuição sempre que seu valor crítico for muito alto. Por fim, elimina-se da amostra valores que excedam a média somada a dois desvios padrões do vetor de valores críticos.



Adicionalmente, com o objetivo de reduzir a possível volatilidade ocasionada por sucessivas entradas e saídas de ativos em períodos de ajuste de preços, a observação eliminada no método de identificação proposto só retornará à amostra 21 dias depois.

## 5- Bibliografia

- Almeida, C.R., Duarte, A.M., Fernandes, C.C., 2000. Credit Spread Arbitrages in Emerging Eurobond Markets. *Journal of Fixed Income*, 2, 100-111.
- Almeida, C.I.R., Gomes, R., Leite, A., Vicente, J., Simonsen, A., 2007. Does Curvature Enhance Forecasting? *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 12, 8, 1171-1196
- BIS, 2005. Zero-coupon yield curves: technical documentation. *BIS Papers*, Nº 25.
- Bliss, R. R., 1996. Testing term structure estimation methods. Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper 96-12a.
- Cook, R. Dennis; and Weisberg, Sanford (1982); *Residuals and influence in regression*, New York, NY: Chapman & Hall
- Diebold, F.X., Li, C., 2006. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics*, 130, 337-364.
- Diebold, F. X.; Rudebusch, G. D.; Aruoba, S. B., 2006. The macroeconomy and the yield curve: A dynamic latent factor approach. *Journal of Econometrics*, 131, pp. 309-338.
- Diebold, F., Li C., Yue V., 2008. Global yield curve dynamics and interactions: A dynamic Nelson and Siegel approach. *Journal of Econometrics*, 146, 351-363.
- Fama, E. F., Bliss R.R., 1987. The information in long-maturity forward rates. *American Economic Review*, 77, 4, 680-692.
- Hubert, M., Vandervieren, E., 2006. An Adjusted Boxplot for Skewed Distributions. Technical Report TR-06-11, Katholieke Universiteit Leuven
- Jankowitsch, R., 2002. Parsimonious Estimation of Credit Spreads. Austrian National Bank.
- Litterman, R., Scheinkman, J., 1991. Common factors affecting bond returns. *Journal of Fixed Income* 1, 49-53.
- McCulloch, J. H., 1971. Measuring the Term Structure of Interest Rates. *The Journal of Business*, Vol. 44, Nº. 1, pp. 19-31.
- McCulloch J.H., 1975. The Tax-Adjusted Yield Curve. *The Journal of Finance* 30, 811-830.
- Medina, L. G., 2012. Modelagem paramétrica de curvas de crédito no mercado brasileiro. Dissertação de Mestrado em Finanças e Economia Empresarial - Fundação Getúlio Vargas.
- Nelson, C.R., Siegel, A.F., 1987, Parsimonious Modeling of Yield Curves, *Journal of Business* 60, 473 – 489
- Svensson, L.E.O., 1994. Estimating and Interpreting Forward Interest Rates:  
Sweden 1992 –1994, IMF Working Paper, International Monetary Fund
- Vasicek, O. A., Fong, H. G., 1982. Term structure modeling using exponential splines. *The Journal of Finance*, 37, 339-348.